Klausur zur "Mathematik für Naturwissenschaftler I"
WS 1996/97 Hochsch.–Doz. Dr. H.–D. Meyer

Aufgabe 1: Differentiation (8 Punkte)

Differenzieren Sie die folgenden Funktionen. Fassen Sie die Ergebnisse so weit wie möglich zusammen. Es kann dabei zweckmäßig sein, die Funktion **vor** dem Differenzieren zu vereinfachen!

(a)

$$f_1(x) = \cos^3 ax \ ;$$

(b)

$$f_2(x) = a \cdot \sin(bx^2) + c \cdot \sin^2(dx) \ ;$$

(c)

$$f_3(x) = \frac{1-x}{1+x^2} \ ;$$

(d)

$$f_4(x) = \ln \sqrt{1+x^2} \ ;$$

(e)

$$f_5(x) = \sqrt{\exp(2 \arctan x)} \ ;$$

(f)

$$f_6(x) = 5^x \cdot \tan x \ .$$

Aufgabe 2: Grenzwerte (6 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-3n+5}{(n+1)^2} \ ;$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{9^n+2^{3n}}{3^{2n}+5} \ ;$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+7}-\sqrt{n^2+1}) \ .$$

Aufgabe 3: Komplexe Zahlen (5 Punkte)

Schreiben Sie die folgenden Größen als *Realteil* + i *Imaginärteil*:

(a)

$$\frac{(4+i)\cdot(2-4i)}{1-i};$$

(b)

$$\sqrt{\frac{z}{z^*|z|^2}+\frac{z^*}{z|z|^2}-\frac{2}{z^*z}}.$$

Aufgabe 4: Induktionsbeweis, Reihen (6 Punkte)

(a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion über n:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}$$

(b) Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$$

(c) Zeigen Sie unter Benutzung von a) und b), daß die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

absolut konvergiert.

Aufgabe 5: Elementare Funktionen (5 Punkte)

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit, daß das Ergebnis jeweils aus einer einzigen einfachen elementaren Funktion besteht:

(a)

$$\exp(2 \ln x) \; ;$$

(b)

$$2 \ln a \cdot \left({}^{a}\log(a\sqrt{x}) - 1 \right) \; ;$$

(c)

$$1 - (\cos x - \sin x)^2 \; .$$

Aufgabe 6: Eulerformel (4 Punkte)

Unter Benutzung der Eulerschen Formel

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

und der Rechenregel

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$$

leite man die Additionstheoreme für den Sinus und den Kosinus her.

Hinweis: Beginnen Sie mit $e^{i(x+y)}$ und trennen Sie zum Schluß Real- und Imaginärteil.

Aufgabe 7: Taylorpolynome (6 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = (1+x)^{-1/4}.$$

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung $T_2(x)$ für diese Funktion zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Geben Sie das Polynom explizit an und kürzen Sie gegebenenfalls die Vorfaktoren.

(b) Geben Sie das (Lagrangesche) Restglied $R_2(x)$ explizit an.

(c) Schätzen Sie $R_2(x)$ für $x = 1/2$ (optimal) nach oben und unten ab.

Aufgabe 8: Binomische Formel (6 Punkte)

(a) Schreiben Sie $(x+y)^5$ als Summe von Potenzen. Werten Sie dabei die Binomialkoeffizienten explizit aus.

(b) Die Exponentialreihe lautet

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \, .$$

Schreiben Sie die Reihe für e^{x+y} hin und werten Sie $(x+y)^n$ mit der Binomischen Formel aus.

Ordnen Sie die Reihe um und zeigen Sie so, daß $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ gilt.

Hinweis: Für absolut konvergente Reihen gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} a_{n,k} \, .$$

Wenn Sie dann noch $j = n - k$ setzen, steht das gewünschte Ergebnis da.

Aufgabe 9: Polardarstellung, komplexe Wurzel (6 Punkte)

(a) Schreiben Sie $z = 1 + i\sqrt{3}$ in Polardarstellung.

(b) Berechnen Sie z^3 unter Benutzung dieser Polardarstellung und geben Sie den Wert in kartesischer Darstellung an.

(c) Berechnen Sie $\sqrt{z}$ und geben Sie den Wert ebenfalls in kartesischer Darstellung an.

(d) Stellen Sie z, z^3 und $\sqrt{z}$ in der Gaußschen Zahlenebene graphisch dar.

Hinweis: Trigonometrische Funktionen für besondere Argumente:

x	sin(x)	cos(x)
0	0	1
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/2$	1	0
π	0	-1
$3\pi/2$	-1	0

Aufgabe 10: Rechnen mit Potenzreihen (5 Punkte)

Die Taylorreihe von $\ln(1+x)$ lautet für $|x| < 1$:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \, x^k \, .$$

(a) Wie lautet die Taylorreihe von $\ln(1-x)$?

(b) Berechnen Sie die Taylorreihe von

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \, .$$

Hinweis: Sie können alles auf die angegebene Reihe zurückführen.

Aufgabe 11: Partielle Ableitungen (6 Punkte)

(a) Berechnen Sie $f_{xx} + f_{yy}$ für

$$f(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^2) \, .$$

(b) Berechnen Sie f_{xyz} für

$$f(x,y,z) = y \cdot \tan x \cdot \exp(-z \ \cot x) + \ln(1 + \sin^2 x + \cos^2 y) \, .$$

Hinweis: Der Satz von Schwartz erlaubt die geschickte Wahl der Reihenfolge der partiellen Ableitungen. Überlegen Sie daher **vorher**, ob sie zuerst nach x, y oder z ableiten.